Equation Dérivées Partielles

MERCI !!

M. Schatzman, Analyse numérique,
Masson.

Eric Goncalves : Méthodes et Analyse Numérique
http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/55/69/67/PDF/MethodesNumeriques_EricGoncalves.pdf

Paola Goatin : Analyse Numérique
http://team.inria.fr/opale/files/2011/11/Anum.pdf

Cours NF04 – 2006 – université de technologie de compiègne

Approches

- Différences finies
- Éléments finis
  - Fonction → approximation par un nombre fini de paramètres
  - Avantages
    - Géométrie complexe
    - Résultats théoriques de convergence
  - Mais
    - Complexe à mettre en œuvre
    - Coût en calcul et mémoire

Différences finies vs. éléments finis

Différences finies (rappels)

- Équation d'équilibre + C. aux L.
- Générer le maillage du domaine
  - Nœuds équidistants
- Obtention de l'équation discrète
  - Formules « toutes faites »
  - Idem pour les C. aux L.
- Construction du système
- Résolution du système
- Post-traitement

Éléments finis

= Forme FORTE ☑

- Obtention forme faible intégrale ✗
- Maillage ☑
  - Nœuds
  - Éléments (connectivité) ✗
- Discrétisation de la forme intégrale sur chaque élément (matrice et vecteur élémentaires) ✗

= Assemblage ☑

-- ☑

-- ☑

Éléments finis en quelques mots

- On cherche la solution de l'EDP sous la forme

$$f_h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} f_i \varphi_i(\boldsymbol{x})$$

- Les fonctions $\varphi_i(\boldsymbol{x})$ forment une base de l'espace de dimension *N* dans lequel on cherche à approximer la 'vraie' solution f par f_h.

- Les coefficients f_i sont déterminés en imposant à f_h d'être la meilleure approximation de f dans l'espace de dimension N choisi.

Formes forte et faible

Particularité de la méthode des éléments finis (MEF) :

Discrétiser, non pas la relation d'équilibre, mais une forme « affaiblie » de cette équation.

Vocabulaire : cette forme est appelée sous des noms divers:

- Forme faible
- Forme intégrale
- Forme variationnelle …

Motivation : affaiblir pour réduire certaines contraintes mathématiques (discontinuités …) empêchant l'utilisation d'outils classiques pour sa résolution.

Conséquence : la solution d'une forme faible correspond à une solution approchée ou « faible » en termes de continuité.

Forme Forte et Résidu

Exemple de thermique 1D

- **Forme forte :**

$$\begin{cases} k\,\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x) + \mathrm{f}(x) = 0 & x \in [0,1] \\ \mathrm{u}(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \partial_x \mathrm{u}(1) = \beta(1) \end{cases}$$

•**Résidu :**

$$\mathrm{res}(\mathrm{u}) = k\,\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x) + \mathrm{f}(x)$$

- Ce résidu s'annule quand u(*x*) est solution.

Méthode des résidus pondérés

Méthode générale :

1. Pondération du résidu par une fonction-test
2. Intégration sur le domaine
3. Intégration par parties
4. Introduction des conditions aux limites

Pondération et Intégration

1. Pondération du résidu par une fonction-test :

   – φ fonction de test suffisamment régulière

$$\varphi(x)\left(k\,\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x)+\mathrm{f}(x)\right)=0 \quad \forall\, x\in[0,1],\ \ \forall\,\varphi$$

2. Intégration sur le domaine

$$\int_0^1 \varphi(x)\left(k\,\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x)+\mathrm{f}(x)\right)\mathrm{d}x=0 \quad \forall\,\varphi$$

$$\int_0^1 \varphi(x)\,k\,\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x=0 \quad \forall\,\varphi$$

3. Intégration par partie

Intégration

3. Intégration par partie

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x)\, k\, \partial_x \mathrm{u}(x)\, \mathrm{d}x + \left[\varphi(x)\, k\, \partial_x \mathrm{u}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi$$

<u>Avantages</u> :

1. Réduction de l'ordre maximum des dérivées présentes
2. Introduction « naturelle » des conditions aux limites

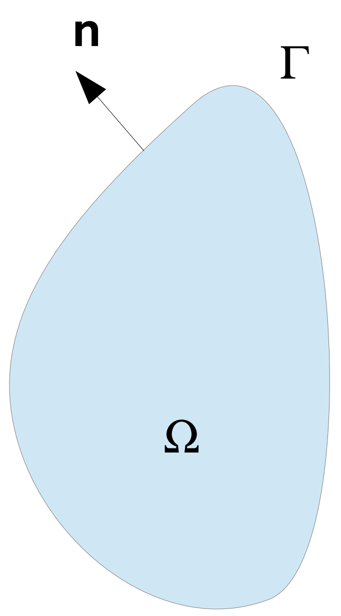
Problème xD

- Généralise l'intégration par partie
- Différents opérateurs
  - Divergence : div **u** = ∇^T **u** (produit scalaire)
  - Théorème de Gauss-Ostrogradski (u $\mathcal{C}^1$)

$$\int_\Omega \nabla^T \mathbf{u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \mathbf{u}^T(a)\,\mathbf{n}(a)\,\mathrm{d}a$$

  - Formule de Green
    - Intégration par partie

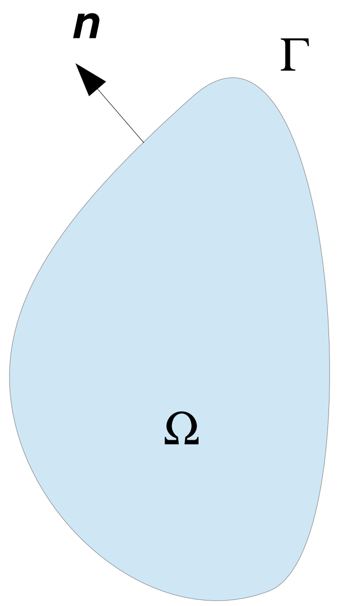
$$\int_\Omega \mathrm{h}(\boldsymbol{x})\nabla^T \mathbf{u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla^T \mathrm{h}(\boldsymbol{x})\,\mathbf{u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \mathrm{h}(a)\,\mathbf{u}^T(a)\,\mathbf{n}(a)\,\mathrm{d}a$$



Problème xD

- Généralise l'intégration par partie
- Différents opérateurs
  - Divergence : div **u** = ∇^T **u** (produit scalaire)
  - Laplacien : $\Delta f = \nabla^T \nabla f$
  - Théorème de Gauss-Ostrogradski (f $\mathcal{C}^2$)

$$\int_\Omega \Delta f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \nabla^T f(a)\,\mathbf{n}(a)\,da$$



  - Formule de Green
    - Intégration par partie

$$\int_\Omega h(\boldsymbol{x})\Delta f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \nabla^T h(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_\Gamma h(a)\nabla^T f(a)\,\mathbf{n}(a)\,da$$

Intégration et conditions de Neumann

3. Intégration par partie

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x) k \partial_x \mathrm{u}(x) \mathrm{d}x + \left[\varphi(x) k \partial_x \mathrm{u}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) \mathrm{f}(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi$$

<u>Avantages</u> :

1. Réduction de l'ordre maximum des dérivées présentes
2. Introduction « naturelle » des conditions aux limites

4. Introduction des conditions aux limites (Neumann)

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x) k \partial_x \mathrm{u}(x) \mathrm{d}x + \varphi(1) k \beta(1) - \varphi(0) k \partial_x \mathrm{u}(0)$$
$$+\int_0^1 \varphi(x) \mathrm{f}(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi$$

Intégration et conditions de Neumann

3. Intégration par partie

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x) k \partial_x \mathrm{u}(x) \mathrm{d}x + \left[\varphi(x) k \partial_x \mathrm{u}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) \mathrm{f}(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi$$

<u>Avantages</u> :

1. Réduction de l'ordre maximum des dérivées présentes
2. Introduction « naturelle » des conditions aux limites

4. Introduction des conditions aux limites (Neumann)

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x) k \partial_x \mathrm{u}(x) \mathrm{d}x + \varphi(1) k \beta(1) - \varphi(0) k \partial_x \mathrm{u}(0)$$
$$+\int_0^1 \varphi(x) \mathrm{f}(x) \mathrm{d}x = 0 \quad \forall \varphi$$

Conditions de Dirichlet et Forme faible

4. Introduction des conditions aux limites (Dirichlet)

   - Rajouter une condition limite de type Neumann $\partial_x u(0)=0$

   - Fonction de test nulle au bord $\varphi(0)=0$

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x)\, k\, \partial_x u(x)\, dx + \varphi(1)\, k\, \beta(1) + \int_0^1 \varphi(x)\, f(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi$$

- Forme faible (ou intégrale)

$$-\int_0^1 \partial_x \varphi(x)\, k\, \partial_x u(x)\, dx + \varphi(1)\, k\, \beta(1) + \int_0^1 \varphi(x)\, f(x)\, dx = 0$$

Formulation variationnelle

- Formulation variationnelle du problème
  - Trouver u ($\mathcal{C}^2$) tel que

$$\begin{cases} -\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x) = \mathrm{f}(x) & \forall\, x \in [0,1] \\ \mathrm{u}(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \partial_x \mathrm{u}(1) = \beta(1) & \end{cases}$$

  - Soit v une fonction de test suffisamment régulière
    - v(0) = 0 sur les bords
    - v et sa dérivée sont intégrable

$$\begin{cases} \int_0^1 \partial_x \mathrm{u}(x) \partial_x \mathrm{v}(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(x) \mathrm{v}(x)\, \mathrm{d}x & \forall\, \mathrm{v}(x) \mid v(0) = 0 \\ \mathrm{u}(0) = \alpha & \end{cases}$$

Formulation variationnelle 2D

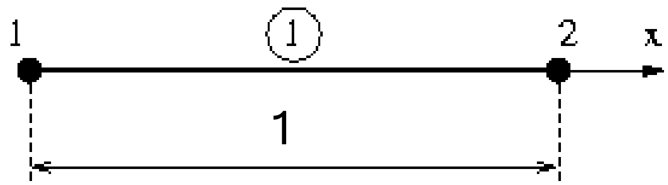
- Formulation variationnelle du problème
  - Trouver u ($\mathcal{C}^2$) tel que $\begin{cases} -\Delta \mathrm{u}(x)=\mathrm{f}(x) & x\in\Omega \\ \mathrm{u}(x)=g(x) & x\in\Gamma \end{cases}$
  - Soit v une fonction de test suffisamment régulière
    - v = 0 sur les bords
    - v et sa dérivée sont intégrable

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla^T \mathrm{u}(x)\nabla \mathrm{v}(x)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega \mathrm{f}(x)\mathrm{v}(x)\,\mathrm{d}x & \forall\, \mathrm{v}(x) \mid v(x)=0 \text{ si } x\in\Gamma \\ \mathrm{u}(x)=g(x) & \text{si } x\in\Gamma \end{cases}$$

Approximation par éléments finis (Galerkin)

- Définition : une approximation au sens des éléments finis d'une variable u(x) sur un élément à deux nœuds, s'écrit :

$$\mathrm{u}(x) = u_1 \varphi_1(x) + u_2 \varphi_2(x)$$



- Vocabulaire : $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ sont appelées *fonctions d'approximation* ou *fonctions de forme* (fonctions polynomiales)

Propriétés : les fonctions de formes vérifient la relation générale :

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$$

Utile pour les calculer

Les éléments finis (Galerkin)

- On choisit une base de fonctions
  - Approximation de u
- Forme variationnelle
  - Toute fonction de base nulle sur les contraintes

$$\mathrm{u}(x)=\sum_i u_i \varphi_i(x)$$

$$\begin{cases} \sum_i u_i \int_\Omega \nabla^{\mathrm{T}} \varphi_i \nabla \varphi_j = \int_\Omega \mathrm{f}\, \varphi_j & \forall \varphi_j \mid \varphi_j(x)=0 \text{ si } x \in \Gamma \\ \sum_i u_i \varphi_i(x) = g(x) & \text{si } x \in \Gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i u_i \int_\Omega \nabla^{\mathrm{T}} \varphi_i \nabla \varphi_j = \int_\Omega \mathrm{f}\, \varphi_j & \forall \varphi_j \mid \varphi_j(x)=0 \text{ si } x \in \Gamma \\ \sum_i u_i \varphi_i(x_j) = g(x_j) & \text{si } x_j \in \Gamma \end{cases}$$

Élément à deux nœuds

1. Choisir l'ordre d'approximation : deux nœuds ⟹ ordre 1

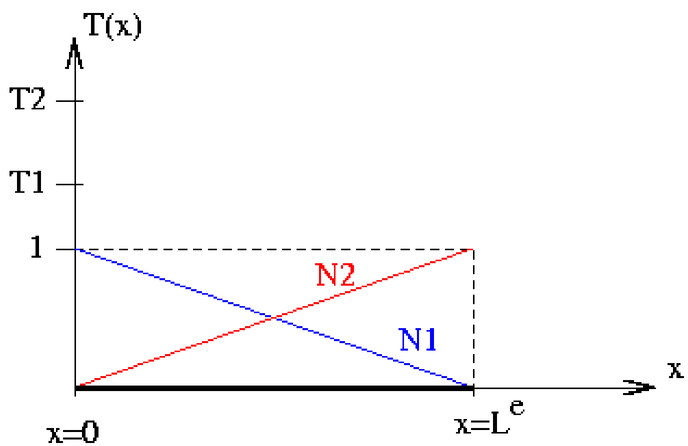
$$\varphi_1(x)=a_1x+b_1 \quad \text{et} \quad \varphi_2(x)=a_2x+b_2$$

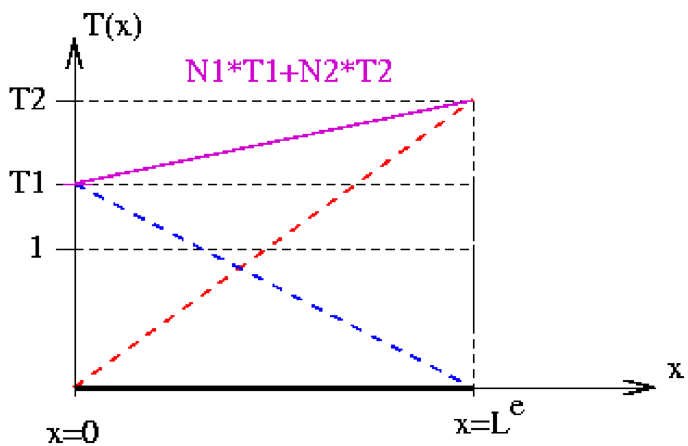
2. Construction des deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} \varphi_1(0)=b_1=1 \\ \varphi_1(1)=a_1+b_1=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi_1(0)=b_2=0 \\ \varphi_1(1)=a_2+b_2=1 \end{cases}$$

3. Résolution :

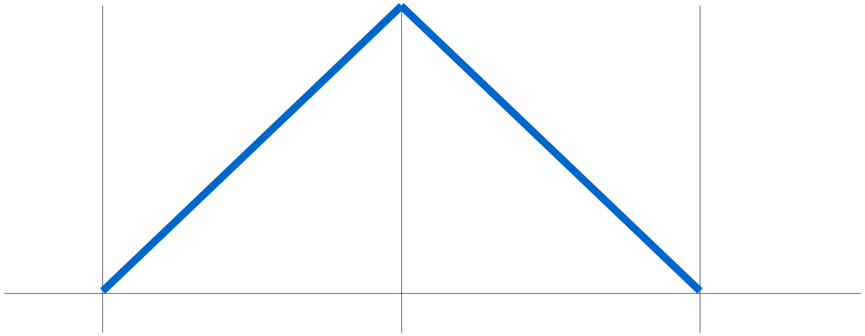
$$\varphi_1(x)=1-x \quad \text{et} \quad \varphi_2(x)=x$$





Éléments finis : famille Pn

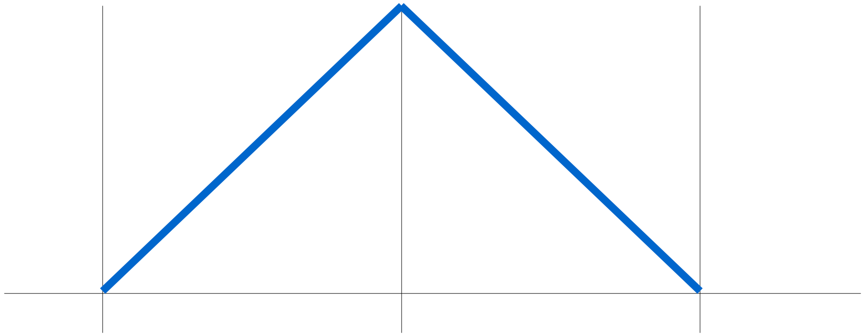
- Polynômes par morceau de degré n
- Linéaire par morceau



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Éléments finis : famille Pn

- Polynômes par morceau de degré n
- Linéaire par morceau

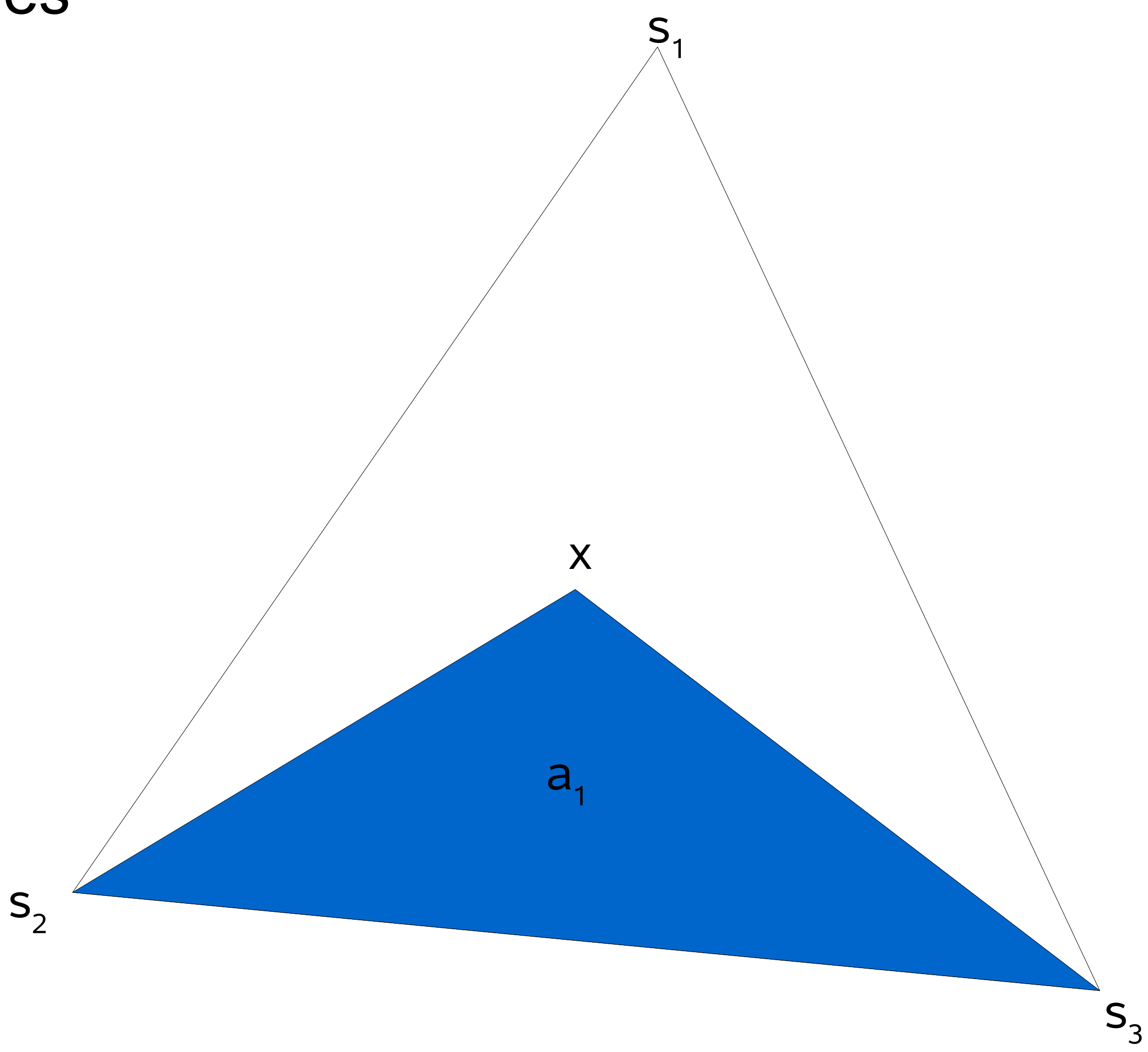


$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Quadratique par morceau P2

P1 en 2D

- Coordonnées barycentriques
  - Poids d'un sommet
  - Aire opposée
  - $x=a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3$

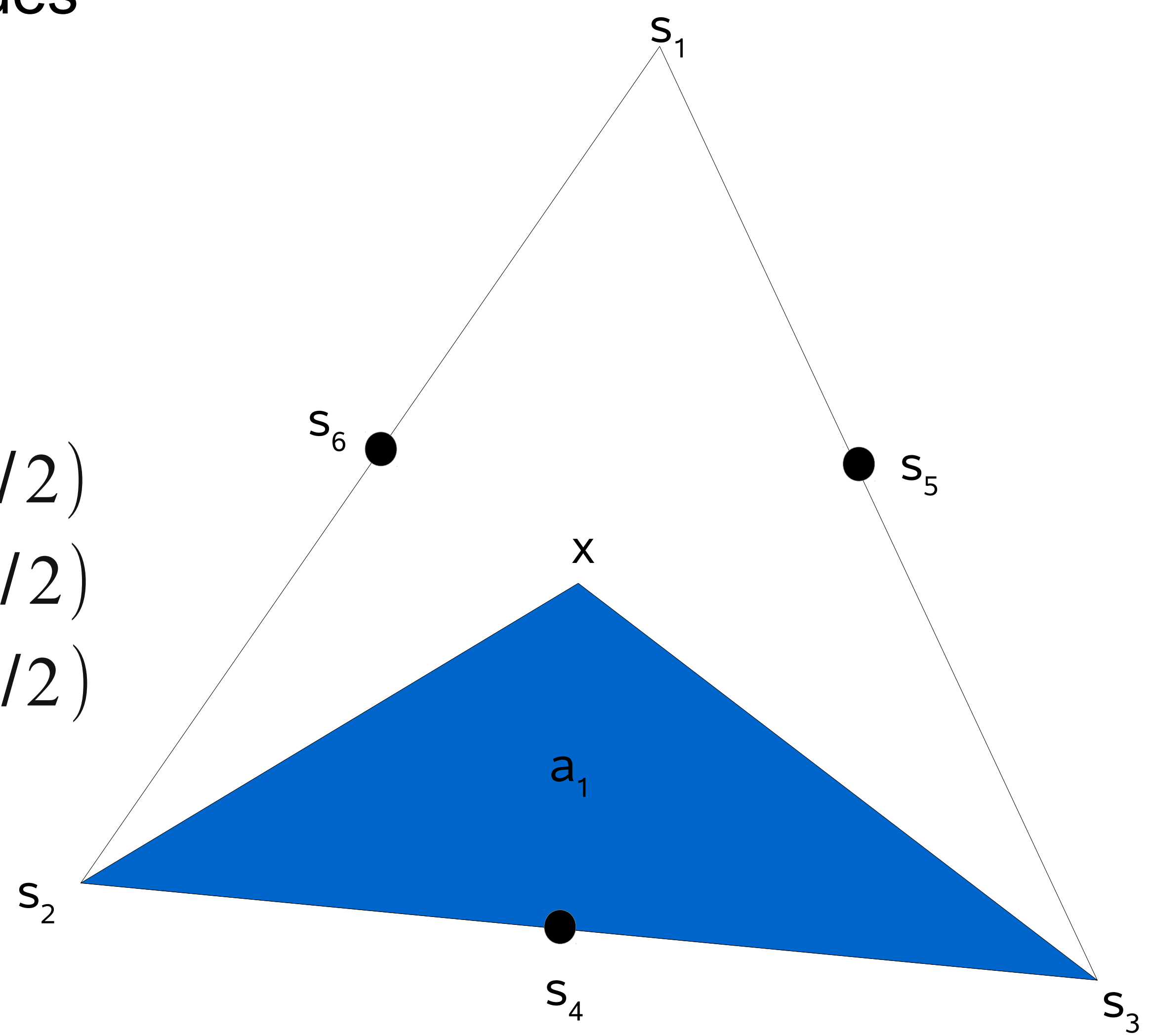


$$\varphi_1(x)=a_1(x)$$
$$\varphi_2(x)=a_2(x)$$
$$\varphi_3(x)=a_3(x)$$

P2 en 2D

- Coordonnées barycentriques
  - Poids d'un sommet
  - Aire opposée
  - $x=a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3$

$$\varphi_1(x)=2a_1(x)(a_1(x)-1/2)$$
$$\varphi_2(x)=2a_2(x)(a_2(x)-1/2)$$
$$\varphi_3(x)=2a_3(x)(a_3(x)-1/2)$$
$$\varphi_4(x)=4a_2(x)a_3(x)$$
$$\varphi_5(x)=4a_1(x)a_3(x)$$
$$\varphi_6(x)=4a_1(x)a_2(x)$$



Éléments finis - résumé

- Principe :
  - Approcher la solution
  - Formulation variationnelle
  - Réduire l'équation
- Étapes
  - Maillage
  - Choix des fonctions d'approximations
  - Calcul des intégrales
  - Résolution du système

Approches

- Différences finies
- Éléments finis
- Volumes finis
  - Intégrer sur des « volumes »
  - Adaptées aux équations de conservation
    - Mécanique des fluides
  - Permet une géométrie complexe
  - Peu de résultat de convergence

Volumes finis : exemple

- Problème

$$\begin{cases} -\partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x) = \mathrm{f}(x) & x \in]0,1[\\ \mathrm{u}(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{u}(1) = \beta \end{cases}$$

- Discrétisation

$$-\partial_x \mathrm{u}(x_{i+1/2}) + \partial_x \mathrm{u}(x_{i-1/2}) = \tilde{\mathrm{f}}_i$$

$$\tilde{\mathrm{f}}_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (x)\,\mathrm{d}x$$