Méthodes numériques – TD6

Différences finies – EDO - EDP

Ce TD est une mise en application directe des cours correspondants. Beaucoup de réponses se trouvent dans les transparents. N'hésitez pas à vous y référer. Et comme toujours, la documentation matlab et sur internet peut vous apporter de nombreuses réponses.

1 *Équation de la chaleur en 1D*

Nous nous intéressons à la résolution de l'EPD suivante, évoluant avec le temps :

$$\begin{cases} \partial_t \mathrm{u}(x,t) - \mu \partial_{xx}^2 \mathrm{u}(x,t) = 0 \\ \mathrm{u}(0,t) = \mathrm{f}(t) \\ \mathrm{u}(1,t) = \mathrm{g}(t) \\ \mathrm{u}(x,0) = \mathrm{u}_0(x) \end{cases}.$$

Au cours de ce TD, nous évaluerons la stabilité des différents schémas : explicite, implicite, combiné. On suppose que f(t)=g(t)=0, que μ=1 et que

$$\mathrm{u}_0(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,1/2] \\ 2(1-x) & x \in [1/2,1] \end{cases}.$$

Les calculs se feront sur l'intervalle de temps [0,0.15]. Dans un premier temps, on discrétise l'espace (x) en 21 intervalles.

1. Explicite
   1. Reformulez-le sous une forme discrète explicite à l'aide des différences finies (cf. cours). Quelles sont les ordres de convergence en temps et en espace ?
   2. Implémentez cette solution (utilisez **diag** pour la création des matrices).
   3. Calculez et visualisez l'évolution de la fonction u au cours du temps pour différents pas de discrétisation du temps pour vérifier que la méthode devient instable pour $\Delta t/\Delta x^2 > ½$.
2. Implicite
   1. Reformulez-le sous une forme discrète implicite à l'aide des différences finies (cf. cours). Quelles sont les ordres de convergence en temps et en espace ?
   2. Implémentez cette solution (utilisez **diag** pour la création des matrices).
   3. Calculez et visualisez l'évolution de la fonction u au cours du temps pour différents pas de discrétisation du temps pour vérifier que la stabilité.
3. Méthode hybride dites de Crank et Nicolson. Elle est obtenue en faisant la moyenne des deux formulations précédentes. Elle est deux fois plus précise.
   1. Introduisez cette nouvelle formulation.
   2. Implémentez cette solution (utilisez **diag** pour la création des matrices).
   3. Calculez et visualisez l'évolution de la fonction u au cours du temps pour différents pas de discrétisation du temps pour vérifier que la stabilité.

2 *Équation de Poisson*

On cherche maintenant la solution d'un système stationnaire 2D, répondant à l'équation de Poisson suivante :

$$\begin{cases} -T\,\Delta z(x,y)=g(x,y) & (x,y)\in]0,1[^2 \\ z(0,y)=a(y) \\ z(1,y)=b(y) \\ z(x,0)=c(x) \\ z(x,1)=d(x) \end{cases}.$$

Cela correspond par exemple à la forme (x,y,z) que va prendre un tissu fixé sur ses bords et soumis à des tensions de surface de grandeur T et à la gravité. Pour ce TD, on suppose que $z(0,y)=z(1,y)=z(x,0)=z(x,1)=0$, $T = 1$ *et* $g(x,y) = -1$.

1. Écrivez le système discrétisé correspondant à l'ordre 2 de convergence en précisant quel schéma de différence finie que vous avez utilisé
2. Mettez-le sous forme matricielle. Quelle est le nombre maximum de valeurs par ligne ? Vous utiliserez par la suite ce nombre et la fonction **spalloc** pour créer des matrices creuses.
3. Résolvez le système et visualisez-le en 3D.