

Méthodes numériques – TD5

Intégration numérique

Dans ce TD, nous nous intéressons aux méthodes d'intégration par monte carlo. Il est encore fortement conseillé de se référer à la documentation des différentes fonctions.

1 Fonction 1D : PDF et CDF analytiques

Nous nous intéressons aux calculs de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

1. Trouvez une PDF qui puisse approcher le comportement de l'intégrande avec les conditions suivantes
 1. La PDF doit être intégrable analytiquement
 2. La CDF correspondante doit être inversible analytiquement
2. Générez les échantillons
 1. Créer un tableau de valeurs aléatoires
 2. Utiliser la fonction inverse de la CDF pour les convertir en positions
 3. Évaluer l'intégrande pour chacune de ces positions
3. Calculez l'intégrale (fonction **mean**) et étudiez la convergence du calcul
 1. Répétez le calcul pour un même nombre d'échantillons et calculez la variance du résultat
 2. Augmentez progressivement le nombre d'échantillons

2 Fonction 1D : PDF et CDF discrètes

On cherche toujours à calculer l'intégrale précédente, mais sur un intervalle restreint $[-10, 10]$.

1. Subdivisez régulièrement l'espace en excluant les bornes. A chacune des positions ainsi calculée, évaluez l'intégrande. Cela constitue votre vecteur P.
2. Normalisez P pour que les valeurs de ce vecteur représentent les probabilités de choisir chacun des intervalles. Cela correspond à une approximation constante par morceau de la PDF idéale proportionnelle à l'intégrande.
3. La CDF correspondante est une fonction linéaire par morceau. Elle peut être calculée en deux étapes
 1. Un tableau contenant les sommes cumulées de la PDF (**cumsum**)
 2. Une interpolation linéaire de ces valeurs (**interp**). Visualisez la fonction correspondante.
4. Comme la fonction inverse de la CDF n'est pas définie, il faut passer par une recherche dichotomique. Si ϵ est une variable aléatoire entre 0 et 1, il faut trouver x tel que $CDF(x) = \epsilon$.
 1. Écrivez une telle fonction.
 2. Quel en est son coût ?
5. Générer les échantillons aléatoires à l'aide de cette dernière fonction
6. Calculer l'intégrale et étudier sa convergence.
7. Quelle est l'influence du premier échantillonnage régulier ?