Rayons X et applications - TD n°3 – éléments de correction

Les simulations seront effectuées sur le site web du CXRO >X-ray Database :
http://henke.lbl.gov/optical_constants/

Exercice 1 : Spécification d'un traitement multicouche

On souhaite concevoir un télescope EUV pour observer la couronne solaire au voisinage de la raie d'émission du FeX à 17,4 nm. On supposera que les miroirs fonctionnent en incidence quasi-normale ($\theta \approx 90°$). On choisit de travailler avec un empilement multicouche périodique Mo/Si.

nSi@17,4nm = 1- 0.0163+ i 0.0038

nMo@17,4nm = 1- 0.1570+ i 0.0363

(a) On supposera dans un premier temps que les couches de Mo et de Si ont la même épaisseur (Γ=0,5). Calculer la valeur de la période à partir de la loi de Bragg.

Bragg :

$$2\,d\,\sin\theta = \lambda$$

=> d = 8,7 nm

Bragg modifié :

$$2\,d\,\sin\theta\sqrt{1-\frac{2\delta_{moy}}{sin^2\theta}} = \lambda$$

$\delta_{moy} = \frac{0{,}0163+0{,}1570}{2} = 0{,}08665$

Facteur correctif = $\sqrt{1-2\delta_{moy}}$ = 0,909

d = 9,6 nm

(b) Calculer le coefficient de réflexion en amplitude à une interface Mo/Si et en déduire le nombre minimal de périodes (Nmin) pour atteindre une réflectivité de 1 si on néglige l'absorption.

r(Mo/Si) = (-0,1407 + i 0,0324) / (1,8267 + i 0,04)

Module(r) = 0,1444 / 1,827 = 0,079 (soit en intensité R = 0,62%)

Nmin = 1/2r = 6,3

(c) Calculer le nombre maximal de période (Nmax) que les photons de longueurs d'onde 17,4 nm peuvent pénétrer.

$\beta_{moy} = \frac{0.0038+0.0363}{2} = 0.02$

$$l_{abs} = \frac{\lambda}{4\pi\beta} = \frac{17.4}{0.08\pi} = 69\ nm$$

63% des photons sont absorbés sur l_{abs} (exp(-1)=0,37) => N_{max} = l_{abs} / d = 7

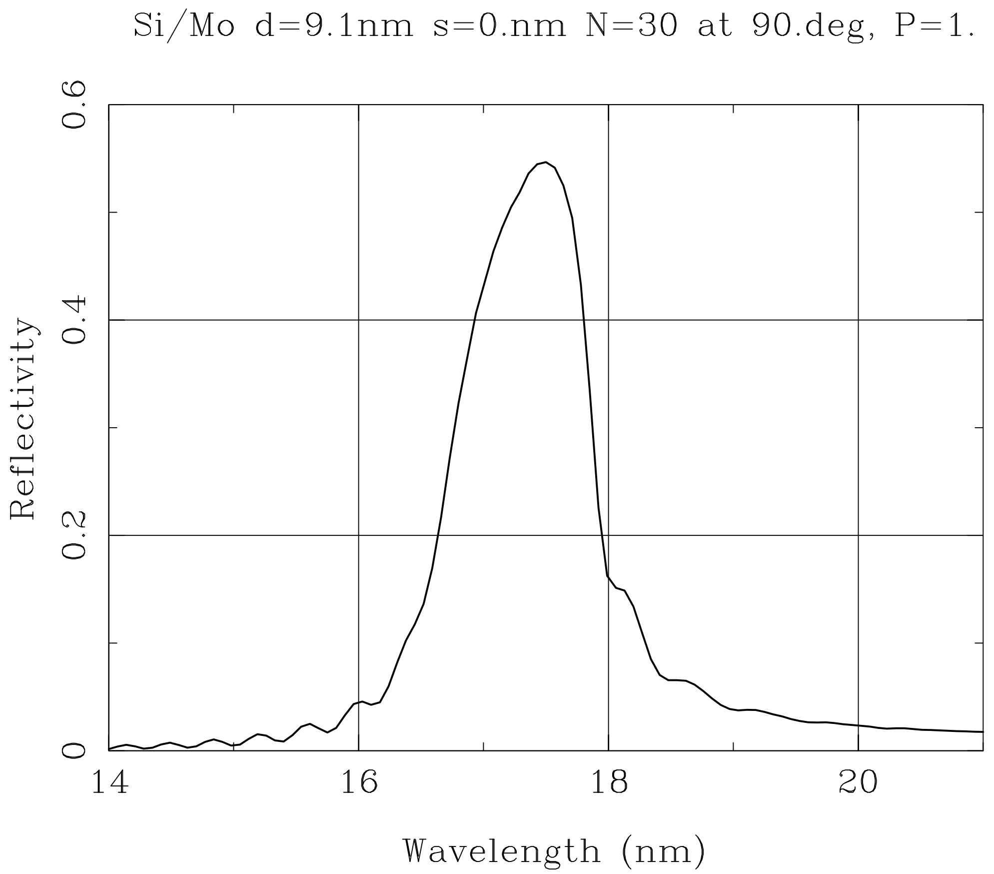
Pour estimer le nombre de période à partir duquel on atteint la saturation de la réflectivité on peut prendre 3 fois cette valeur, ce qui correspond à 95% des photons absorbés (exp(-3)=0,05) => $3\ N_{max} = 21$

(d) En vous aidant de simulations, proposer une structure de multicouche (période d, rapport Γ et nombre de périodes N) qui permette d'obtenir en théorie une réflectivité supérieure à 50% à 17,4 nm.

Une solution possible est tracée ci-dessous avec 30 périodes de Mo/Si, d=9.1nm et Γ=0.3.

On notera que la valeur de d est différente de celle calculée au a) et ceci pour 2 raisons :

- ici le Γ n'est pas de 0.5 mais de 0.3 (le δ moyen de la loi de Bragg modifiée dépend du Γ)
- même avec la bonne valeur de Γ la loi de Bragg modifiée ne donne pas la valeur exacte de la période car cette loi néglige l'absorption.

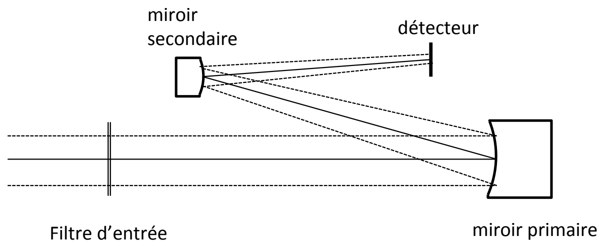


(e) Déterminer la tolérance sur la période de la multicouche pour assurer une réflectivité supérieure à 50%.

En partant de l'exemple précédent et en modifiant la période d, on trouve que la réflectivité à 17,4 nm est supérieure à 50% si la période d est comprise entre 9 nm et 9.2 nm. La tolérance sur la période est donc de ± 0.1 nm !

Exercice 2 : Etude d'un télescope EUV (8 points)

On considère ici un télescope imageur EUV à 2 miroirs de type Cassegrain hors axe dont le schéma de principe est rappelé ci-dessous. Cet instrument est conçu pour réaliser des images de la couronne solaire.



Les miroirs doivent être revêtus d'un empilement multicouche périodique permettant de réfléchir une longueur d'onde λ correspondant à une des raies d'émission du soleil suivantes :

- raie Fe XX à λ = 13,1 nm
- raie Fe XII à λ = 19,5 nm
- raie He II à λ = 30,4 nm

L'objectif de cet exercice est de comparer les performances que l'on peut obtenir en fonction de la longueur d'onde choisie. On supposera que les miroirs fonctionnent en incidence normale pour les calculs.

1) Quel est le rôle du filtre métallique placé en entrée du télescope ?
Le filtre a pour rôle de rejeter la lumière visible émise par le soleil et de filtrer les ordres supérieurs de Bragg des miroirs multicouches (voir cours n°4).

2) Quel serait la réflectivité des miroirs primaire et secondaire sans revêtement multicouche pour chaque longueur d'onde. On considèrera des miroirs en silice (SiO2) sous incidence normale pour ce calcul. L'indice optique de la silice aux différentes longueurs d'onde est donné dans le tableau 1.

La réflectivité des miroirs nus vaut R = $|r|^2$
avec r le coef. de réflexion en amplitude :

$$r = \frac{1 - n(SiO2)}{1 + n(SiO2)}$$

Pour $\lambda = 13{,}1$ nm : R =$1{,}27.10^{-4}$

Pour $\lambda = 19{,}5$ nm : R = $8{,}52.10^{-4}$

Pour $\lambda = 30{,}4$ nm : R = $4{,}44.10^{-3}$

On peut vérifier ces valeurs par des simulations sur le site du CXRO.
Pour gagner du temps dans les calculs, on peut utiliser la formule approchée suivante en incidence normale :

$$R \approx \frac{\delta^2 + \beta^2}{4}$$

3) On propose d'utiliser les couples de matériaux suivant pour réaliser les empilements multicouches : Mo/Si ou Mg/SiC. A partir des indices optiques donnés en table 1, déterminer quel est le meilleur choix pour chaque longueur d'onde.

Pour chaque longueur d'onde, il faut choisir le matériaux le moins absorbant (plus faible beta) comme matériau espaceur de la multicouche. D'après le tableau 1, on choisit donc :
Mo/Si pour 13,1 nm (espaceur = Si)
Mo/Si pour 19,5 nm (espaceur = Si)
Mg/SiC pour 30,4 nm (espaceur = Mg)

4) Donner la valeur approximative de la période de chacun des empilements. Vérifier vos réponses de la questions 3 par des simulations. Quelle réflectivité maximale peut-on espérer pour chaque longueur d'onde ?

Loi de Bragg :

$$2\, d \sin\theta = \lambda$$

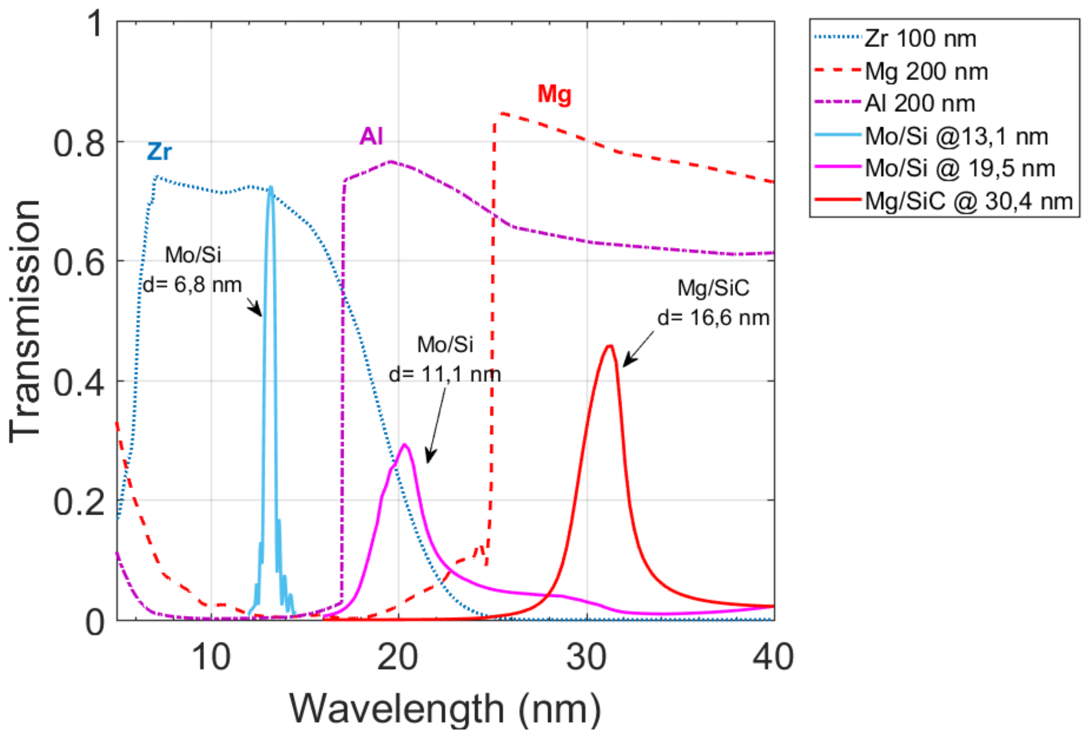
=> d (Mo/Si) = 6,5 nm @ 13,1 nm

=> d (Mo/Si) = 9,75 nm @ 19,5 nm

=> d (Mg/SiC) = 15,2 nm @ 30,4 nm

5) On considère les 3 filtres métalliques suivant pour le filtre d'entrée : 100 nm de Zr, 200 nm d'Al ou 200 nm de Mg. Simuler la transmission de ces filtres en fonction de la longueur d'onde sur la plage 5 nm – 40 nm. Quel(s) filtre(s) peut-on utiliser dans le télescope pour chacune des longueurs d'onde proposées ?

La figure ci-dessous représente les transmissions des filtres (en pointillé) ainsi que la réflectivité des 3 multicouches (trait plein).
On voit sur cette figure que les filtres possibles sont :
- pour 13.1 nm : Zr
- pour 19.5nm : Al
- pour 30.4nm : Mg (ou Al)



6) Les miroirs utilisés présentent une rugosité de surface σ de 0,6 nm. On suppose que cette rugosité se propage à chaque interface de la multicouche. Estimer la perte de réflectivité induite par cette rugosité pour les 3 longueurs d'ondes proposées. On supposera que les miroirs fonctionnent en incidence normale pour ce calcul.
On utilisera pour le calcul la formule de Debye-Weller :

$$r = r_0 \exp\left[-2 \times \left(\frac{2\pi \sin(\theta)\sigma}{\lambda}\right)^2\right]$$

avec r le coefficient de réflexion en amplitude du miroir multicouche, r_0 le coefficient de réflexion en amplitude dans le cas idéal (σ=0) et θ l'angle de rasance.
Vérifier vos calculs par des simulations.

On obtient après calcul :
- pour 13.1 nm : r/r0 = 0.85 soit R/R0 = 0.72
- pour 19.5nm : r/r0 = 0.93 soit R/R0 = 0.86
- pour 30.4nm : r/r0 = 0.97 soit R/R0 = 0.94

La rugosité a une influence plus grande lorsque la longueur d'onde diminue.

7) En prenant en compte tous les paramètres précédents (filtre, miroirs et rugosité), estimer la transmission totale de l'instrument pour chaque longueur d'onde et conclure.

La transmission totale de l'instrument vaut T_{filtre} x $(R_{multicouche})^2$ x $(R/R0)^2$

	λ= 13,1 nm	λ = 19,5 nm	λ = 30,4 nm
Transmission filtre	0.7	0.75	0.8
R multicouche idéale	0.7	0.3	0.45
Effet rugosité : R/R0	0.72	0.86	0.94
Transmission totale	18 %	5%	14%

Tableau 1 : Indices optiques (arrondis) aux longueurs d'onde d'intérêt (n = 1-δ+iβ)

	λ = 13,1 nm	λ = 19,5 nm	λ = 30,4 nm
SiO2	δ=0.020 ; β=0.010	δ=0.049 ; β=0.029	δ=0.091 ; β=0.089
Si	δ=-0.002 ; β=0.002	δ=0.023 ; β=0.004	δ=0.070 ; β=0.009
Mo	δ=0.069 ; β=0.006	δ=0.203 ; β=0.092	δ=0.031 ; β=0.247
SiC	δ=0.014 ; β=0.004	δ=0.056; β=0.014	δ=0.149; β=0.044
Mg	δ=0.011 ; β=0.027	δ=-0.014 ; β=0.032	δ=0.012 ; β=0.003

Exercice 3 : Loi de Bragg modifiée

Démontrer la formule de la loi de Bragg modifiée. On pourra partir de l'équation de la loi de Bragg pour une structure périodique de période d : $m\lambda' = 2d \sin\theta'$ où λ' et θ' sont respectivement la longueur d'onde et l'angle de rasance à l'intérieur de la structure. On utilisera la loi de Snell-Descartes pour établir la loi de Bragg modifiée en fonction de λ et θ qui représentent la longueur d'onde et l'angle de rasance à l'extérieur de la structure. On se placera sous l'hypothèse β<<δ.