

Rayons X et applications - TD n°5

Étude d'une lentille à zones de Fresnel

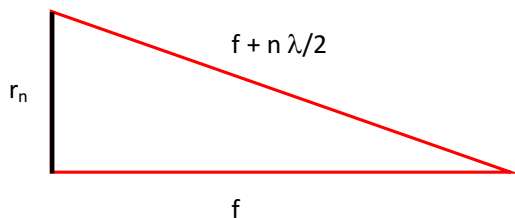
(d'après Attwood Chapter 10 – homework problems)

On considère ici une lentille à zones de Fresnel de focale f , optimisée pour une longueur d'onde λ .

(a) Montrer que les rayons r_n des limites des zones sont donnés par :

$$r_n^2 = n\lambda f + \frac{n^2 \lambda^2}{4}$$

La différence de marche entre les rayons diffractés par 2 anneaux successifs (r_n et r_{n+2}) doit être un multiple de la longueur d'onde. D'où le schéma suivant :

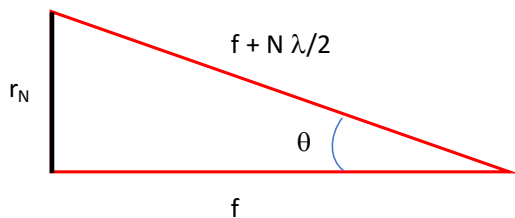


En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient la formule demandée.

(b) Montrer que cette formule se simplifie, pour les lentilles de faible ouverture numérique ($NA \ll 1$), en :

$$r_n \approx \sqrt{n\lambda f}$$

L'ouverture numérique $NA = \sin \theta$ avec θ l'angle défini par le rayon issu du dernier anneaux (N). D'où le schéma suivant :



D'après ce schéma, $\sin \theta \ll 1 \Leftrightarrow N\lambda/2 \ll f$

Ce qui implique $n\lambda/4 \ll f$, d'où la simplification.

(c) Démontrer, en utilisant la formule du (b), que toutes les zones ont la même aire.

L'aire de la zone comprise entre r_{n+1} et r_n vaut :

$$\pi (r_{n+1}^2 - r_n^2) = \pi ((n+1)\lambda f - n\lambda f) = \pi \lambda f = \pi r_1^2 \text{ (=aire de la première zone)}$$

(d) En quoi le résultat du (c) est-il important pour les propriétés de focalisation et d'imagerie de la lentille ?

l'aire d'une zone définit le nombre de photons diffractés par cette zone d'où l'importance pour les propriétés de la lentille.

(e) Montrer que la résolution (Res) de la lentille est égale à la largeur Δr de la zone la plus extérieure (on supposera $\Delta r \ll r_N$ et on se placera toujours sous l'hypothèse d'une faible ouverture).

La résolution est définie par : $\text{Res} = \lambda / 2NA = \lambda / 2 \sin \theta$

En appliquant la loi des réseaux sur la dernière zone de largeur Δr (en supposant un réseau périodique de période $2\Delta r$) on obtient :

$$\sin \theta = \lambda / 2\Delta r$$

D'où $\text{Res} = \Delta r$

(f) En utilisant les résultats précédents, montrer que le nombre de zones de la lentille peut s'exprimer ainsi :

$$N \approx \frac{\lambda f}{4 \text{Res}^2}$$

Le rayon de la lentille vaut $r_N \approx \lambda f / 2 \text{Res}$ (en supposant $NA \ll 1$)

Par ailleurs on a $r_N^2 \approx N\lambda f$

D'où la formule.

(g) On souhaite réaliser une lentille de Fresnel avec les propriétés suivantes :

longueur d'onde : $\lambda = 2,5 \text{ nm}$

longueur focale : $f = 630 \mu\text{m}$

le diamètre de la lentille : $D = 50 \mu\text{m}$

Déterminer les paramètres suivants :

le nombre de zones $N = 384$

la résolution de la lentille $\text{Res} = \Delta r$

la largeur de la dernière zone : $\Delta r \approx 32 \text{ nm}$

les rayons r_n des 10 premières zones

n	r_n (μm)
1	1,25
2	1,77
3	2,17
4	2,51
5	2,81
6	3,07
7	3,32
8	3,55
9	3,76
10	3,97