Examen 2013
Méthodes numériques & Matlab

Durée totale : 1h30
Documents autorisés : aucun
Règles :

Les exercices ont été écrits de manière à ce qu'il y ait une certaine indépendance entre les questions. Ne restez pas bloqué et n'hésitez pas à avancer et à revenir plus tard. Pour cela numérotez bien les réponses.

Il est donc important de lire le sujet intégralement avant de se lancer dans l'examen.

Bon courage.

1. Équation eikonale

Cette équation régit le trajet de la lumière dans un milieu. On dénote n l'indice de réfraction du milieu, $\boldsymbol{x}$ une position le long de ce trajet et s l'abscisse curviligne le long du trajet. Le trajet est défini par l'équation suivante :

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)=\nabla n \quad .$$

On introduit le vecteur $\boldsymbol{g}$, gradient du front d'onde, défini par

$$(2)\quad \boldsymbol{g}=n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \quad .$$

1. À l'aide de l'équation (2), transformez l'équation (1) en un système de deux équations ordinaires de premier ordre. (1 point)
2. Proposez un schéma de résolution d'Euler implicite. (2 points)
   (mots clefs : différence finie d'ordre 1).
3. Proposez un schéma de résolution d'Euler explicite. (2 points)
4. Quelle est la différence en termes de stabilité entre les deux schémas ? (1 point)
5. Proposez un schéma explicite d'ordre 2 (par exemple, Runge-Kutta d'ordre 2). (2 points)

2. Positionnement par GPS et moindres carrés.

Nous allons étudier la méthode de Bancroft qui permet de retrouver une position à partir des signaux émis par la constellation de satellites GPS. Chaque satellite i transmet sa position $(x_i, y_i, z_i)^T$ ainsi que l'heure (synchronisée à une horloge atomique) d'émission du signal t_{ei}. Ce signal est reçu à l'heure t_{ri} par le récepteur.

On cherche à connaître la position $(x, y, z)^T$ du récepteur ainsi que le décalage dt de son horloge par rapport à une horloge atomique. Dans ce contexte, le calcul de la distance au satellite conduit à l'équation suivante pour chaque des satellites :

$$(3)\quad \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}=c(t_{ri}-t_{ei})-c\,dt=d_i-d \quad .$$

En élevant le tout au carré et en développant, on obtient

$$(4)\quad (x_i^2+y_i^2+z_i^2-d_i^2)-2(x_i+y_i\,y+z_i\,z-d_i\,d)+(x^2+y^2+z^2-d^2)=0 \quad .$$

Pour simplifier l'écriture, on introduit le pseudo-produit scalaire de Lorentz

$$\langle \boldsymbol{u}|\boldsymbol{v}\rangle=u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z-u_w v_w$$

ainsi que $\boldsymbol{s}=(x, y, z, d)^T$. L'équation (4) s'écrit alors

$$(5)\quad \langle \boldsymbol{s}_i|\boldsymbol{s}_i\rangle-2\langle \boldsymbol{s}_i|\boldsymbol{s}\rangle+\langle \boldsymbol{s}|\boldsymbol{s}\rangle=0 \quad .$$

1. Montrez que le système à résoudre peut s'écrire sous la forme matricielle
   $$(6)\quad \mathbf{B}\,\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\langle \boldsymbol{s}|\boldsymbol{s}\rangle\,\boldsymbol{u}$$
   avec $\boldsymbol{u}=(1, \ldots, 1)^T$ vecteur dont la taille correspond au nombre de satellites observés. Vous donnerez la forme de la matrice $\mathbf{B}$ et du vecteur $\boldsymbol{a}$. (3 points)

On suppose que $\langle \boldsymbol{s} | \boldsymbol{s} \rangle = K$ est constant.

2. En quoi cette hypothèse est raisonnable ? (1 point)
3. Avec cette hypothèse, donner une solution approchée $\boldsymbol{s}^*$ au sens des moindres carrés de l'équation (6). Pour cela, vous poserez dans une premier temps le problème à minimiser au sens des moindres carrés, avant d'en proposer la solution minimale. (3 points)
4. Combien de satellites doivent-ils être visible pour espérer avoir une solution ? (1 point)

Par la suite, on utilise $\langle \boldsymbol{s} | \boldsymbol{s} \rangle = K \simeq \langle \boldsymbol{s}^* | \boldsymbol{s}^* \rangle$

5. Montrez que résoudre l'équation (6) revient à trouver les racines d'un polynôme de degré (2 points)

3. Questions de cours

1. Matrices et systèmes linéaires : Soit A une matrice inversible
   1. Quel est le principe d'une factorisation LU ? (1 point)
   2. Sur quel type de matrice est-elle applicable ? (1 point)
   3. Quel est le principe d'une factorisation de Cholesky ? (1 point)
   4. Sur quel type de matrice est-elle applicable ? (1 point)
   5. Quel est le conditionnement de la matrice A par rapport à ses valeurs propres ? (1 point)
2. Espace de fonctions
   1. Donnez la définition d'un produit scalaire entre deux fonctions intégrales f et g. (1 point)
   2. Donnez une base orthogonale de fonctions définie sur un disque. (1 point)
   3. Donnez une base orthogonale de fonctions sur une sphère unité. (1 point)
3. Probabilités
   1. Donnez les caractéristiques d'une fonction de densité probabilité – PDF ? (2 points)
   2. Quelle est la relation entre fonction de densité cumulative (CDF) et PDF ? (1 point)
   3. Quelle est la relation entre probabilité et densité de probabilité ? (1 point)
4. Décrivez le principe d'une intégration au sens de Monté Carlo. Pour cela, donnez la formule d'estimation de l'intégrale, ainsi que la méthode de choix des échantillons. (2 points)

4. Questions Matlab

Donnez les résultats des opérations suivantes (1 point par question)

1. u= [1,2 ;; 2 ,3 ;; 4 , 4]
2. u*u
3. u.*u
4. u'*u
5. u(:,2)
6. ones(1,3)*u.^2
7. À quoi correspond le résultat de la ligne précédente ?